

2010年度幾何学特別演習II 問題 1月12日

演習問題 1 1 - 1 . 有限胞体複体 X, Y の直積について、 $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$ を示せ。

演習問題 1 1 - 2 . $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ は $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ に作用する。 A のホモロジー群 $H_0(T^2), H_1(T^2), H_2(T^2)$ への作用 A_* を求めよ。

演習問題 1 1 - 3 . X を $S^1 \times D^2$ と微分同相な S^3 の部分集合とする。 $S^3 - \text{Int}X$ のホモロジー群を求めよ。ここで、 $\text{Int}X = X - \partial X$ とする。

問題 1 1 - 4 . 2つの n 次元多様体 M_1, M_2 に対しそれらの連結和を次のように定義する。 M_1, M_2 に含まれる n 次元閉球体を D_1, D_2 とし

$$M_1 \# M_2 = (M_1 - \text{Int}D_1) \sqcup (M_2 - \text{Int}D_2) / \sim$$

但し、 $x \in \partial(M_1 - \text{Int}D_1) = \partial D_1 \cong S^{n-1}$, $y \in \partial(M_2 - \text{Int}D_2) = \partial D_2 \cong S^{n-1}$ に対し、 $x \sim y \iff x = \bar{y} \left(\overline{(y_1, y_2, \dots, y_n)} = (-y_1, y_2, \dots, y_n) \right)$ とする。 $M_1 \# M_2$ の整数係数ホモロジー群を M_1, M_2 の整数係数ホモロジー群であらわせ。

問題 1 1 - 5 . $A : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ を $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbf{Z})$ の \mathbf{R}^2 への作用から引き起こされる同相写像とすると、次の空間の整数係数ホモロジー群を計算せよ。

$$X = (D^2 \times S^1)_1 \sqcup (D^2 \times S^1)_2 / \sim$$

但し、 $x \in \partial(D^2 \times S^1)_1 \cong \partial D^2 \times S^1$, $y \in \partial(D^2 \times S^1)_2 \cong \partial D^2 \times S^1$ に対し、 $x \sim y \iff x = A(y)$ とする。

問題 1 1 - 6 . (1) $g \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し、2次元多様体でホモロジー群が $H_2 \cong \mathbf{Z}$, $H_1 \cong \mathbf{Z}^{2g}$, $H_0 \cong \mathbf{Z}$ となるものを構成せよ。

(2) $g \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ に対し、2次元多様体でホモロジー群が $H_2 \cong 0$, $H_1 \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}^g$, $H_0 \cong \mathbf{Z}$ となるものを構成せよ。

問題 1 1 - 7 . G を有限生成有限アーベル群とする。 $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ とする。3次元多様体 M で、 $H_3(M) \cong \mathbf{Z}$, $H_2(M) \cong \mathbf{Z}^k$, $H_1(M) \cong \mathbf{Z}^k \oplus G$, $H_0(M) \cong \mathbf{Z}$ となるものを構成せよ。