

2010年度幾何学特別演習II 問題 1月19日

演習問題12-1.  $X, Y, Z$  を次で与えられる位相空間とする。

$$\begin{aligned}
 X &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid ((x^2 + y^2)^{1/2} - 2)^2 + z^2 = 1\} \\
 &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0, (x - 2)^2 + z^2 \leq 1\} \\
 Y &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\
 &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y = 0, |z| \leq 1\} \\
 Z &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 1\} \\
 &\quad \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0, (x - 1)^2 + z^2 = 1\}
 \end{aligned}$$

- (1)  $X, Y, Z$  の胞体分割、単体分割を与えよ。
- (2)  $X, Y, Z$  の胞体分割に対応するチェイン複体を書き、ホモロジー群を求めよ。
- (3)  $Y, Z$  の単体分割に対応するチェイン複体を書き、ホモロジー群を求めよ。

演習問題12-2. 位相空間  $X, Y$  のジョイン (join)  $X * Y$  を商空間  $X * Y = X \times [0, 1] \times Y / \sim$  として定義する。但し、同値関係  $\sim$  は、

$$\begin{aligned}
 (x_1, t_1, y_1) \sim (x_2, t_2, y_2) &\iff (t_1 = t_2 = 0 \text{ かつ } x_1 = x_2) \\
 &\quad \text{または} \\
 &\quad (t_1 = t_2 = 1 \text{ かつ } y_1 = y_2)
 \end{aligned}$$

で生成されるものとする。

- (1)  $S^k * S^\ell \approx S^{k+\ell+1}$  を示せ。
- (2)  $X = \{p\}$  (1点からなる空間) とするとき、 $\{p\} * Y$  を  $Y$  上の錐 (cone) と呼ぶ。 $\{p\} * Y$  は可縮な (1点とホモトピー同値な) 位相空間であることを示せ。
- (3)  $X = S^0 = \{-1, 1\}$  のとき、 $S^0 * Y$  を  $Y$  の懸垂 (suspension) と呼ぶ。 $Y$  のホモロジー群により、 $S^0 * Y$  のホモロジー群を表せ。

ユークリッド空間内の2つの交わらないアフィン部分空間上の単体  $\sigma^k = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$ ,  $\sigma^\ell = \langle w_0 \cdots w_\ell \rangle$  に対して、それらのジョインを  $\sigma^k * \sigma^\ell = \langle v_0 \cdots v_k w_0 \cdots w_\ell \rangle$  で定義する。

2つの交わらないアフィン部分空間上の単体複体  $K, L$  に対し、それらのジョイン  $K * L$  を、 $K$  の単体、 $L$  の単体、 $K$  の単体と  $L$  の単体のジョインとして得られる単体からなる単体複体とする。

問題12-3. (1) 単体複体  $K, L$  のジョイン  $K * L$  のチェイン複体の単体について以下が成立することを示せ。

$$\partial(\sigma_0^0 * \sigma_1^0) = \sigma_1^0 - \sigma_0^0, \ell \geq 1 \text{ のとき、} \partial(\sigma^0 * \sigma^\ell) = \sigma^\ell - \sigma_0 * (\partial\sigma^\ell)$$

(2)  $K = \langle b \rangle$  とするとき、 $\langle b \rangle * L$  のチェイン複体のホモロジー群を求めよ。

問題 1 2 - 4 .  $K$  を有限単体複体、 $K$  の頂点集合  $V$  に線形順序が与えられているとすると、 $[0, 1] \times |K|$  の単体複体の構造を定めることができる。すなわち、 $v_i^0 = (0, v_i)$ ,  $v_i^1 = (1, v_i)$  として、 $K$  の  $k$  単体  $\langle v_0 \cdots v_k \rangle$  に対して、 $k + 1$  個の  $k + 1$  単体  $\langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1 \rangle$  ( $i = 0, \dots, k$ ),  $k + 2$  個の  $k$  単体  $\langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_{i+1}^1 \cdots v_k^1 \rangle$  ( $i = -1, \dots, k$ ) を考える。

(1) これらの全体

$$\begin{aligned} & \{ \langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1 \rangle \mid (i = 0, \dots, k), \langle v_0 \cdots v_k \rangle \in K \} \\ & \cup \{ \langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_{i+1}^1 \cdots v_k^1 \rangle \mid (i = -1, \dots, k), \langle v_0 \cdots v_k \rangle \in K \} \end{aligned}$$

は単体複体となることを示せ。

(2)  $\sigma = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$  に対して

$$P\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1 \rangle$$

と置くと、

$$\partial P\sigma + P\partial\sigma = \langle v_0^1 \cdots v_k^1 \rangle - \langle v_0^0 \cdots v_k^0 \rangle$$

を示せ。

問題 1 2 - 5 .  $k$  次元単体  $\sigma$  の重心を  $b_\sigma$  とする

( $\sigma = \langle v_0 \cdots v_k \rangle$  とするとき、 $b_\sigma = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k v_i$ )。

$\sigma$  をそのすべての面  $\tau$  とともに、単体複体  $K_\sigma$  と見て、頂点の集合を  $\{b_\tau \mid \tau \prec \sigma\}$ , 面の集合を、 $\{\sigma_{\tau_0 \tau_1 \dots \tau_j} = \langle b_{\tau_0} b_{\tau_1} \dots b_{\tau_j} \rangle \mid \tau_0 \prec \tau_1 \prec \dots \prec \tau_j\}$  としたものを  $K_\sigma$  の重心細分と呼び、 $K'_\sigma$  と書く。単体複体  $K$  に対し、 $K$  の重心細分  $K'$  が各単体を重心細分したものの和集合として定義される。 $|K'| = |K|$  である。

$[0, 1] \times |K|$  の単体分割 (単体複体の構造) として、 $\{0\} \times K$ ,  $\{1\} \times K'$  を部分複体とするもの  $L$  が存在する。

$v_i = (0, v_i)$ ,  $b_\sigma = (1, b_\sigma)$  と略記する。 $[0, 1] \times \sigma$  の単体複体の構造  $L_\sigma$  を、

$$L_\sigma = \langle b_\sigma \rangle * K_\sigma \cup \bigcup_{i=0}^k L_{\partial_i \sigma}$$

とおく。但し、 $\partial_i \langle v_0 \cdots v_k \rangle = \langle v_0 \cdots v_{i-1} v_{i+1} \cdots v_k \rangle$  である。このとき、 $\bigcup_{\sigma \in K} L_\sigma$  が

求める  $[0, 1] \times |K|$  の単体分割である。

(1)  $L(K_{\sigma^0})$ ,  $L(K_{\sigma^1})$ ,  $L(K_{\sigma^2})$  を図示せよ。

(2)  $\text{bsd} : C_*(K) \rightarrow C_*(L)$  を  $\text{bsd}\langle v \rangle = \langle b_v \rangle$ ,  $\dim \sigma \geq 1$  に対し  $\text{bsd}(\sigma) = \langle b_\sigma \rangle * (\text{bsd}(\partial\sigma))$  で定義する。  $\text{BSD} : C_*(K) \rightarrow C_{*+1}(L)$  を  $\text{BSD}\langle v \rangle = -\langle b_v \rangle * \langle v \rangle$ ,  $\dim \sigma \geq 1$  に対し  $\text{BSD}(\sigma) = -\langle b_\sigma \rangle * (\text{BSD}(\partial\sigma) + \sigma)$  で定義する。

このとき、 $\partial \text{BSD}\sigma + \text{BSD}\partial\sigma = \text{bsd}\sigma - \sigma$  を示せ。