

図 16: 2次元標準単体 Δ^2 , 3次元標準単体 Δ^3

位相空間のホモロジー群の公理を満たすホモロジー理論の存在を示す。

35 特異単体複体

X を位相空間とする。まず標準単体 Δ^k を

$$\Delta^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k \mid 1 \geq x_1 \geq \dots \geq x_k \geq 0\}$$

により定義する。

定義 35.1 連続写像 $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ を X の k 次元特異単体あるいは特異 k 単体 (*singular k -simplex*) と呼ぶ。 X の特異 k 単体を基底とする自由加群を $S_k(X)$ と書く。 $S_k(X)$ の元は有限和 $c = \sum a_i c_i$ であり、 k 次元特異チェインあるいは特異 k チェイン (*singular k -chain*) と呼ばれる。

X が単体複体ならば、 k 単体が像であるような写像はもちろん特異 k 単体である。 感覚的には、 X に対して考えられるすべての単体分割を同時に考えている。 特異 k 単体を Δ^k の面に制限したものは、 特異 $k-1$ 単体と考えられる。 これを定式化して境界準同型 $S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ を定義するために、 次の写像を用意する。

$i = 0, \dots, k$ に対して、 $\varepsilon_i : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ を次で定義する。 図 17 参照。

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (1, x_1, \dots, x_{k-1}), \\ \varepsilon_i(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_i, x_i, \dots, x_{k-1}) \quad (0 < i < k), \\ \varepsilon_k(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \end{aligned}$$

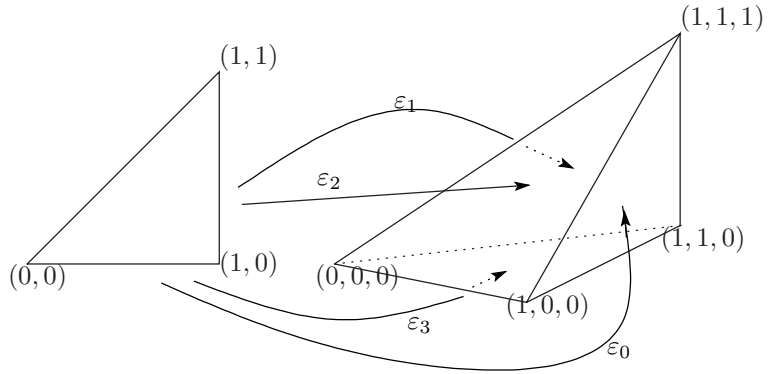
$\varepsilon_i : \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ はアフィン写像で、 $v_i = \sum_{j=1}^i e_j$ について、 $\varepsilon_i(v_\ell) = \begin{cases} v_\ell & (\ell < i) \\ v_{\ell+1} & (\ell \geq i) \end{cases}$ を満たしている。

特異 k 単体 $\sigma : \Delta^k \rightarrow M$ の境界 $\partial\sigma$ を $\partial\sigma = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i$ により定義する。

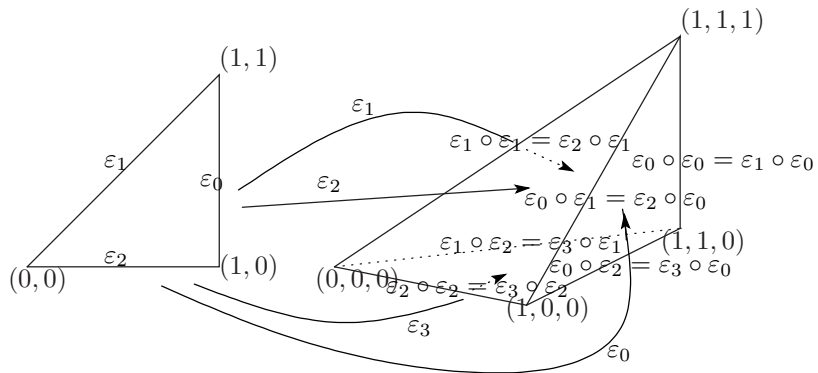
この境界の定義により境界準同型 $\partial : S_k(X) \rightarrow S_{k-1}(X)$ が定義される。

【問題 35.2】 $0 \leq i \leq j \leq k-1$ のとき、 $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i$ を示し、 $S_{k-2}(X) \xleftarrow{\partial} S_{k-1}(X) \xleftarrow{\partial} S_k(X)$ について $\partial \circ \partial = 0$ を示せ。

定義 35.3 特異単体複体 $S_*(X)$ のホモロジー群を特異ホモロジー群と呼び、 $H_*(X)$ で表す。



⊠ 17: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 : \Delta^2 \rightarrow \Delta^3$



⊠ 18: $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i$ ($0 \leq i \leq j \leq k-1$)

空間対 (X, A) に対しては、特異単体複体 $S_*(A)$, $S_*(X)$ が構成されるが、 $S_*(A)$ は、 $S_*(X)$ の部分チェイン複体である。 $S_k(X, A) = S_k(X)/S_k(A)$ として、 $S_k(X, A)$ はチェイン複体となる。

定義 35.4 チェイン複体 $S_k(X, A)$ のホモロジー群を空間対 (X, A) の特異ホモロジー群と呼び、 $H_*(X, A)$ と書く。

チェイン写像の短完全系列 $0 \rightarrow S_k(A) \xrightarrow{i_*} S_k(X) \xrightarrow{j_*} S_k(X, A) \rightarrow 0$ から、空間対のホモロジー群の完全系列が得られる。

35.1 特異ホモロジー群の関手性と次元公理

$f: X \rightarrow Y$, $f_*: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ を $S_k(X)$ の生成元 $\sigma: \Delta^k \rightarrow X$ に対し、 $S_k(Y)$ の生成元 $f_*(\sigma) = f \circ \sigma$ を対応させることで定義する。

$$\begin{aligned} \partial(f_*\sigma) &= \partial(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^k (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \varepsilon_i \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i f \circ (\sigma \circ \varepsilon_i) \\ &= f_* \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i \right) = f_*(\partial\sigma) \end{aligned}$$

だから、 f_* はチェイン写像である。チェイン写像 $f_*: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ はホモロジー群の準同型 $f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ を誘導する。

空間対の間の連続写像 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ は、チェイン写像 $f_*: S_*(X, A) \rightarrow S_*(Y, B)$ を導き、ホモロジー群の準同型 $f_*: H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$ を誘導する。

$\sigma: \Delta^k \rightarrow X$, $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ に対して、 $(g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma)$ だから、チェイン写像 $f_*: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$, $g_*: S_*(Y) \rightarrow S_*(Z)$ ($g \circ f$)_* : $S_*(X) \rightarrow S_*(Z)$ について $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ である。従って、ホモロジー群の準同型 $f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$, $g_*: H_*(Y) \rightarrow H_*(Z)$ ($g \circ f$)_* : $H_*(X) \rightarrow H_*(Z)$ について、 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ である。

この議論は、空間対 (X, A) , (Y, B) , (Z, C) の間の写像についても全く同様に成立する。

以上で、特異ホモロジー群の関手性が分かった。

1点からなる空間 $\{p\}$ について、 $S_k(\{p\}) \cong \mathbb{Z}$ で、生成元は定値写像 $c_p^k: \Delta^k \rightarrow \{p\}$ である。

$$S_*(\{p\}) : 0 \leftarrow \mathbb{Z}c_p^0 \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}c_p^1 \xleftarrow{\partial} \mathbb{Z}c_p^2 \xleftarrow{\partial} \dots$$

$\partial: S_k(\{p\}) \rightarrow S_{k-1}(\{p\})$ は、

$$\partial c_p^k = \sum_{i=0}^k c_p^k \circ \varepsilon_i = \sum_{i=0}^k c_p^{k-1} = \begin{cases} 0 & (k \text{ が奇数または } k=0) \\ c_p^{k-1} & (k \text{ が } 2 \text{ 以上の偶数}) \end{cases}$$

により計算され、 $\partial: S_k(\{p\}) \rightarrow S_{k-1}(\{p\})$ は、 k が奇数または $k=0$ のとき、零写像、 k が 2 以上の偶数のとき同型写像である。従って、 $H_k(\{p\}) \cong$

$$\begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \text{ となる。}$$

35.2 特異ホモロジー群のホモトピー不変性

単体複体 K の実現 $|K|$ において、 k 単体 $\langle v_0 \cdots v_k \rangle$ はアフィン写像 $\Delta^k \rightarrow |K|$ で、 Δ^k の頂点 $\sum_{j=1}^i e_j$ を $|K|$ の点 v_i に写すものとする。そうすると $\langle v_0 \cdots v_k \rangle \in S_k(|K|)$ である。

$[0, 1] \times \Delta^k$ の単体分割 $K_{[0,1] \times \Delta^k}$ について、 $P\Delta^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \langle v_0^0 \cdots v_i^0 v_i^1 \cdots v_k^1 \rangle \in S_{k+1}([0, 1] \times \Delta^k)$ である。 $\Delta^k \in S_k(\Delta^k)$ は、恒等写像 id_{Δ^k} のことである。恒等写像 id_{Δ^k} に対し、 $\partial \text{id}_{\Delta^k} = \sum_{i=0}^k \varepsilon_i \in S_{k-1}(\Delta^k)$ となる。 $(\partial P + P\partial) \text{id}_{\Delta^k} = i_1 - i_0$ である。ここで、 $i_1 = \langle v_0^1 \cdots v_k^1 \rangle$, $i_0 = \langle v_0^0 \cdots v_k^0 \rangle$ は $\{0\} \times \Delta$, $\{0\} \times \Delta$ への包含写像である。

ホモトピックな連続写像 $f_0 \simeq f_1 : X \rightarrow Y$ に対し、 $F : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ を f_0 と f_1 の間のホモトピーとする。 $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ に対し、 $(f_0)_* \sigma = f_0 \circ \sigma$, $(f_1)_* \sigma = f_1 \circ \sigma \in S_k(Y)$ が定まっている。

$$P_F(\sigma) = F_*(\text{id}_{[0,1]} \times \sigma)_* P \text{id}_{\Delta^k}$$

とおく。

$$P_F(\sigma \circ \varepsilon_i) = F_*(\text{id}_{[0,1]} \times (\sigma \circ \varepsilon_i))_* P \text{id}_{\Delta^{k-1}} = F_*(\text{id}_{[0,1]} \times \sigma)_* P \varepsilon_i$$

に注意すると、

$$\begin{aligned} \partial P_F(\sigma) + P_F(\partial \sigma) &= \partial F_*(\text{id}_{[0,1]} \times \sigma)_* P \text{id}_{\Delta^k} + P_F\left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i\right) \\ &= F_*(\text{id}_{[0,1]} \times \sigma)_*(\partial P \text{id}_{\Delta^k}) + \sum_{i=0}^k (-1)^i F_*(\text{id}_{[0,1]} \times \sigma)_* P \varepsilon_i \\ &= F_*(\text{id}_{[0,1]} \times \sigma)_*((\partial P + P\partial) \text{id}_{\Delta^k}) \\ &= F_*(\text{id}_{[0,1]} \times \sigma)_*(i_1 - i_0) \\ &= f_1 \circ \sigma - f_0 \circ \sigma \\ &= (f_1)_* \sigma - (f_0)_* \sigma \end{aligned}$$

35.3 特異ホモロジー群の切除公理

$X = X_1 \cup X_2$, X_1, X_2 は開集合とする。 $X_{12} = X_1 \cap X_2$ として、チェイン写像 $i_* : S_*(X_1, X_{12}) \rightarrow S_*(X, X_2)$ が存在する。この i_* がホモロジー群の同型 $i_* : H_*(X_1, X_{12}) \rightarrow H_*(X, X_2)$ を誘導し、対のホモロジー完全系列の連結準同型と可換になることが切除公理の内容である。

単体複体の場合は、 $i_* : C_*(K_1, K_{12}) \rightarrow C_*(K, K_2)$ が同型写像であり、 i_* がホモロジー群の同型を誘導することはほとんど自明であったが、 $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ で、 X_1, X_2 のどちらにも含まれないものがあるので、証明のためには、 $r \circ i_* = \text{id}_{S_*(X_1, X_{12})}$, $i_* \circ r$ と $\text{id}_{S_*(X_1, X_{12})}$ がチェインホモトピックとなるようなチェイン写像 $r : S_*(X, X_2) \rightarrow S_*(X_1, X_{12})$ を工夫して作る必要がある。

定義のために問題 33.2 の bsd , BSD を用いる。ただし、 $b_\sigma \in \sigma$ と考え、 $\text{bsd}(\text{id}_{\Delta^k}) \in S_k(\Delta)$, また、 $\text{BSD}(\text{id}_{\Delta^k}) \in S_{k+1}(\Delta)$ と考える。

$\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ に対し、 σ の重心細分を $\text{bsd} \sigma = \sigma_* \text{bsd}(\text{id}_{\Delta^k})$ で定義する。

Δ^k の開被覆 $\{\sigma^{-1}(X_1), \sigma^{-1}(X_2)\}$ のルベーク数を考えると、十分大きな m をとると $\text{bsd}^m \sigma$ の各特異単体の像が X_1 または X_2 に含まれることがわかる。このような m の最小のものを m_σ とおく。

$A\sigma = \text{BSD} \sigma + \cdots + \text{BSD} \text{bsd}^{m_\sigma - 1} \sigma$ を考える。

$\partial A\sigma + A\partial\sigma + \sigma$ に現れる特異単体は、 X_1 または X_2 に像を持つ。実際、特異単体 τ が X_1 または X_2 に像をもつならば、 $\text{BSD} \tau$ に現れる特異単体は、 X_1 または X_2 に像を持つ。 $\tau < \sigma$ に対して、 $m_\tau \leq m_\sigma$ だから、

$$\begin{aligned} \partial A\sigma + A\partial\sigma + \sigma &= \text{bsd}^{m_\sigma} \sigma \\ &\quad + \sum_{i=0}^k (-1)^i (\text{BSD} \text{bsd}^{m_{\partial_i \sigma}} \partial_i \sigma + \cdots + \text{BSD} \text{bsd}^{m_\sigma - 1} \partial_i \sigma) \end{aligned}$$

であるが、ここに現れる特異単体は、 X_1 または X_2 に像を持つ。

そこで、 $r\sigma = \partial A\sigma + A\partial\sigma + \sigma$ と定義する。このとき、

$$\partial(r\sigma) - r(\partial\sigma) = \partial(\partial A\sigma + A\partial\sigma + \sigma) - (\partial A(\partial\sigma) + A\partial(\partial\sigma) + \partial\sigma) = 0$$

であるから、 r はチェーン写像である。 σ の像が X_1 に含まれれば、 $m_\sigma = 0$ だから、 A の定義により、 $r \circ i_* = \text{id}_{S_*(X_1, X_{12})}$ である。また、 $i_* \circ r(\sigma) - \sigma = \partial A\sigma + A\partial\sigma$ だから、 $i_* \circ r$ と $\text{id}_{S_*(X_1, X_{12})}$ はチェーンホモトピックである。

以上で、 $i_* : H_*(X_1, X_{12}) \rightarrow H_*(X, X_2)$ が同型写像となることが示された。

対のホモロジー完全系列の連結準同型と可換になることは容易に分かる。実際、単体複体の場合と同様に次のチェーン複体とチェーン写像の図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(X_{12}) & \xrightarrow{i_*} & S_*(X_1) & \xrightarrow{j_*} & S_*(X_1, X_{12}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_*(X_2) & \xrightarrow{i_*} & S_*(X) & \xrightarrow{j_*} & S_*(X, X_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

は可換であるから次の図式は可換となる。

$$\begin{array}{ccc} H_k(X_1, X_{12}) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(X_{12}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k(X, X_2) & \xrightarrow{\partial} & H_{k-1}(X_2) \end{array}$$

36 問題の解答

【問題 35.2 の解答】 $0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k-1$ について $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j$ を考える。 $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j :$

$\Delta^{k-2} \rightarrow \Delta^k$ はアフィン写像で、 $v_\ell = \sum_{m=1}^{\ell} e_m$ について、

$$\begin{aligned} i \leq j \text{ のとき、} (\varepsilon_i \circ \varepsilon_j)(v_\ell) &= \begin{cases} v_\ell & (\ell < i) \\ v_{\ell+1} & (i \leq \ell < j) \\ v_{\ell+2} & (j \leq \ell) \end{cases} \\ j < i \text{ のとき、} (\varepsilon_i \circ \varepsilon_j)(v_\ell) &= \begin{cases} v_\ell & (\ell < j) \\ v_{\ell+1} & (j \leq \ell < i+1) \\ v_{\ell+2} & (i+1 \leq \ell) \end{cases} \end{aligned}$$

である。従って、 $i \leq j$ のとき、 $\varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i$ となる。

$$\begin{aligned} \partial\partial\sigma &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^k (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j + \sum_{0 \leq i \leq j \leq k-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i \circ \varepsilon_j + \sum_{0 \leq i \leq j \leq k-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_{j+1} \circ \varepsilon_i = 0 \end{aligned}$$

