幾何学 I　　132 ページ　11 行目のパラグラフの最後と、下から 6 行目のパラグラフについて

$\varepsilon = \min\{\varepsilon^{(i)}\}$ とすると，任意の $x \in M$ に対し，$x \in W_i$ となる W_i をとれば，$F^i(t,x) = {\varphi_i}^{-1}(F^{(i)}(t,\varphi_i(x)))$ は曲線 $F^i_x : (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ で，$\dfrac{\mathrm{d}\,F^i_x}{\mathrm{d}\,t}(t) = X(F^i_x(t))$ を満たす．$x \in W_j$ とすると，F^j_x も定義されるが，$F^j_x = F^i_x$ となる．M はハウスドルフだから，この等式は $(-\varepsilon,\varepsilon)$ の 0 を含む閉集合上で成立するが，$(-\varepsilon,\varepsilon)$ で成立するのは，次の議論からわかる．

常微分方程式の解

$$F^{(i)} : (-\varepsilon,\varepsilon) \times \varphi_i(W_i \cap W_j) \longrightarrow \varphi_i(V_i \cap V_j),$$
$$F^{(j)} : (-\varepsilon,\varepsilon) \times \varphi_j(W_i \cap W_j) \longrightarrow \varphi_j(V_i \cap V_j)$$

を比較する．$\dfrac{\mathrm{d}\,F^{(i)}_t}{\mathrm{d}\,t} \circ F^{(i)}_{-t}$ はベクトル場 X の $\varphi_i(W_i \cap W_j)$ における表示 $\displaystyle\sum_k \xi^{(i)}_k \frac{\partial}{\partial x^{(i)}_k}$ を与える．$(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})_* \dfrac{\mathrm{d}\,F^{(i)}_t}{\mathrm{d}\,t} \circ F^{(i)}_{-t}$ はベクトル場 X の $\varphi_j(W_i \cap W_j)$ における表示すなわち $\displaystyle\sum_\ell \xi^{(j)}_\ell \frac{\partial}{\partial x^{(j)}_\ell}$ と一致している．

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(F^{(i)}(t,\boldsymbol{x})) = (\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})_* \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} F^{(i)}(t,\boldsymbol{x})$ だから，常微分方程式の解の一意性から，t について，0 を含むある開区間上で $(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(F^{(i)}(t,\boldsymbol{x}))$ は，$F^{(j)}(t,(\varphi_j \circ {\varphi_i}^{-1})(\boldsymbol{x}))$ と一致する．よって，$(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上で $F^j_x = F^i_x$ となる．